

Title	Diagonalization, Jordan Form, and Rational Form
Supervisor	Prof. Abdullah Mohammed Ibraheem
Students	Alsanad, and Almuslimani
Abstract	Linear systems of equations play a central role in many areas of mathematics and its applications. When the coefficient matrix of such a system is diagonal, the system can be solved easily, since each equation becomes independent of the others. This simplicity makes diagonal matrices especially important in both theoretical and practical contexts. As a result, mathematicians have long been interested in determining whether a given matrix can be transformed into a diagonal matrix through a suitable change of basis. This process, known as diagonalization, greatly simplifies matrix computations and provides insight into the structure of linear transformations. However, not every matrix is diagonalizable. In such cases, matrices may still be transformed into forms that are close to diagonal, such as the Jordan canonical form. Unfortunately, not every matrix can be transformed into a diagonal or Jordan canonical form over a given field. For this reason, mathematicians developed the rational canonical form, which provides a standard form for every square matrix and is often easier to study than the original matrix. These classifications depend heavily on the characteristic polynomial. If the characteristic polynomial splits into distinct linear factors, then the matrix is diagonalizable. If it splits completely but has repeated roots, the matrix may be transformed into Jordan canonical form. When the characteristic polynomial does not split over the field, the matrix can still always be transformed into rational canonical form.
المُلخَص باللغة العربية	تلعب الأنظمة الخطية للمعادلات دورًا أساسيًا في العديد من فروع الرياضيات وتطبيقاتها. فعندما تكون مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات قطرية، يصبح حل النظام سهلًا، لأن كل معادلة تكون مستقلة عن المعادلات الأخرى. ولهذا البساطة أهمية كبيرة، سواء في الجوانب النظرية أو التطبيقية. ونتيجة لذلك، اهتم الرياضيون منذ زمن طويل بمعرفة ما إذا كان بالإمكان تحويل مصفوفة معطاة إلى مصفوفة قطرية بواسطة تغيير مناسب للأساس. وتُعرف هذه العملية باسم الاستقطار (Diagonalization)، وهي تُبسِّط العمليات على المصفوفات بشكل كبير وتوفر فهمًا أعمق لبنية التحويلات الخطية.

ومع ذلك، ليست كل مصفوفة قابلة للاستقطار. وفي مثل هذه الحالات، يمكن أحيانًا تحويل المصفوفة إلى صورة قريبة من القطرية، مثل الصورة القانونية لجوردان.

لكن للأسف، ليست كل مصفوفة قابلة للتحويل إلى صورة قطرية أو إلى صورة جوردان القانونية فوق حقل معين. ولهذا السبب طوّر الرياضيون ما يُعرف بالصورة القانونية النسبية (Rational Canonical Form)، والتي تعطي صورة معيارية لكل مصفوفة مربعة، وتكون غالبًا أسهل للدراسة من المصفوفة الأصلية. وتعتمد هذه التصنيفات اعتمادًا كبيرًا على كثرة الحدود المميّزة. فإذا كانت كثرة الحدود المميّزة تتحلل إلى عوامل خطية مختلفة، فإن المصفوفة تكون قابلة للاستقطار. وإذا كانت تتحلل بالكامل ولكن مع وجود جذور مكررة، فيمكن تحويل المصفوفة إلى صورة جوردان القانونية. أما إذا كان لكثيرة الحدود المميّزة جذور مركبة، فإنه يمكن دائمًا تحويل المصفوفة إلى الصورة القانونية النسبية.